Groupe fondamental et revêtements
Cours de Premaster donné à l'ENS de Lyon au printemps 2020

Mikael de la Salle

version du 26 août 2020

Ces notes de cours sont en cours de rédaction. Merci de me faire parvenir les coquilles, erreurs que vous pourriez rencontrer. Merci ! Je remercie déjà Paul-Henry Leemann pour de nombreuses remarques et corrections.

Le but de ce petit cours est de présenter un tout petit bout de la topologie algébrique, qui est un domaine des mathématiques où l'on étudie des espaces topologiques avec des outils d'algèbres. Dans ce cours on se restreindra à un exemple de tel outil : le groupe fondamental (ou groupe de Poincaré), qui est un groupe associté naturellement à tout espace topologique "raisonnable".

Le contenu de ce cours est extrêmement classique, et il y a beaucoup de références et d'approches possibles. La référence la plus citée de nos jours est sans doute le livre de Hatcher [**3**], disponible librement sur Internet. J'ai choisi une approche différente en définissant le groupe fondamental en terme de revêtements, sans doute un plus abstraite mais à mon avis plus élégante, et très proche de celle du chapitre 4 de Douady et Douady [**2**]. Voir aussi [**1**].

Une référence vivement conseillée pour apprendre plus de choses ou voir les choses d'une autre façon est le site Analysis Situs, `http://analysis-situs.math.cnrs.fr/`, où il fait bon se promener et se perdre dans les preuves, les explications historiques, les films, les animations...

Le Chapitre 1 introduit la notion de revêtement d'un espace topologique, et définit le groupe fondamental comme le groupe d'automorphismes du revêtement maximal. Les résultats les plus importants sont le résultat d'existence de ce revêtement maximal pour des espaces topologiques *raisonnables* (théorème 1.18), les propriétés de naturalité [1] du groupe fondamental, et leur conséquence formelle que constitue la correspondance de Galois, qui établit une correspondance entre les revêtements et les sous-groupes du groupe fondamental.

Le Chapitre suivant développe une approche alternative au groupe fondamental, plus concrète mais aussi plus technique. La notion de base est celle d'homotopie, qui formalise la notion de déformation continue d'espaces topologiques et d'applications entre espaces topologiques. À part le théorème 2.20 qui démontre que les deux approches au groupe fondamental coïncident, le résultat le plus important de ce chapitre est sans doute le Corollaire 2.19, qui donne des exemples fondamentaux d'espaces raisonnables auxquels les résultats du Chapitre 1 s'appliquent : les espaces connexes et localement contractiles, c'est-à-dire qui localement peuvent être déformés continûment en un point.

Le dernier chapitre de ce cours traite du théorème de Van Kampen, qui fournit une recette pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique en le découpant en pièces plus simples. Ce chapitre est totalement indépendant du Chapitre 2 : toutes les preuves sont faites en termes de revêtements et pas d'homotopies de chemins.

1. on dirait fonctorialité si on s'autorisait à utiliser le langage des catégories

Chapitre 1

Revêtements

Conventions

Dans tout ce cours, et sauf mention contraire, tous les espaces topologiques considérés seront supposés séparés [1].

1. Définition et exemples

DÉFINITION 1.1. Une application continue $p\colon E \to B$ entre deux espaces topologiques est appelée *un revêtement* si p est surjective, et si tout point b dans B admet un voisinage U ouvert tel que $p^{-1}(U)$ est la réunion d'une famille $(V_i)_{i\in I}$ d'ouverts deux à deux disjoints (indexé par un ensemble I qui dépend a priori de b) et tel que la restriction de p à chaque V_i est un homéomorphisme sur U. On appelle :

— B *la base* du revêtement.
— E *l'espace total* du revêtement.
— p *l'application*, ou *la projection* du revêtement.
— $p^{-1}(b)$ ou I *la fibre* au dessus de b
— L'application $U \times I \to p^{-1}(U)$ qui à (x, i) associe l'unique élément de $p^{-1}(x) \cap V_i$ une *trivialisation locale*.
— U est appelé *un voisinage de trivialisation* de b.

Notons que par définition, une trivialisation locale est un homéomorphisme entre $U \times I$ (muni de la topologie produit de U et de I vu comme un espace topologique discret) et $p^{-1}(U)$.

Attention : la surjectivité de p n'est pas essentielle dans la définition, et de nombreux auteurs ne demandent pas que p soit surjective. Noter que si B est connexe et E est non vide, alors p est nécessairement surjective (exercice).

Commençons par énumérer une liste de propriétés plus ou moins évidentes. Si $p\colon E \to B$ est un revêtement, alors

(1) p est en particulier un homéomorphisme local : tout point x de E admet un voisinage V tel que p est un homéomorphisme de V sur $p(V)$.

(2) pour tout point b de B, $p^{-1}(b)$ est une partie discrète et sans point d'accumulation.

(3) Si $A \subset B$, alors $p\big|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ est un revêtement, appelé le revêtement restreint à A.

---

1. On rappelle qu'un espace topologique X est séparé si la diagonale $\{(x, x), x \in X\}$ est une partie fermée de $X \times X$ pour la topologie produit. Ou, ce qui revient au même, si toute paire d'éléments disctincts de X possèdent des voisinages disjoints.

(4) $b \mapsto \mathrm{Card}(p^{-1}(b))$ est localement constante [2]. En particulier, si B est connexe, cette application est constante.

(5) Si B est compact, alors E est compact si et seulement si $\mathrm{Card}(p^{-1}(b))$ est fini pour tout b.

Le plus important est de donner des exemples.

EXEMPLES 1.2. (1) *Revêtement trivial* : si F est un espace topologique discret non vide et B un espace topologique quelconque, alors l'application $\mathrm{proj}\colon B \times F \to B$ définie par $\mathrm{proj}(b, f) = b$ est un revêtement, où $B \times F$ est muni de la topologie produit. En effet, il est clair que l'application est surjective, et on peut prendre $U = B$ dans la définition : $p^{-1}(B)$ est la réunion disjointe des $B \times \{f\}$, qui sont tous ouverts si et seulement si F est discret.

(2) Exemple fondamental : $x \in \mathbf{R} \mapsto e^{2i\pi x} \in \mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est un revêtement.

(3) Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}^n \mapsto (e^{2i\pi x_k})_{1 \leq k \leq n} \in (\mathbf{S}^1)^n \simeq \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ est un revêtement.

(4) Si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, alors $z \in \mathbf{C} \mapsto z^k \in \mathbf{C}$ n'est pas un revêtement (la fibre n'est pas de cardinal constant). Par contre, sa restriction $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ est un revêtement, ainsi que sa restriction $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$.

(5) $z \in \mathbf{C} \mapsto e^z \in \mathbf{C}^*$ est un revêtement.

(6) Un exemple qui englobe tous les précédents est celui de l'action propre et libre d'un groupe discret : Si Γ est un groupe agissant librement [3] et topologiquement proprement [4] par homéomorphismes sur un espace localement compact E, alors l'application quotient $p\colon E \to E/\Gamma$ (le quotient de E par la relation d'équivalence « être dans la même Γ-orbite ») est un revêtement.

Le dernier exemple mérite une preuve.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in E$. Le fait que E est localement compact implique que x admet un voisinage ouvert W relativement compact. Par propreté de l'action, $I := \{g \in \Gamma \setminus \{1\} : gW \cap W \neq \emptyset\}$ est fini. Par liberté de l'action, on peut même supposer que I est vide. En effet, tout $g \in I$ ne fixe pas x, donc comme E est séparé (un des axiomes de "localement compact"), x admet un voisinage F_g tel que $F_g \cap gF_g = \emptyset$, donc en intersectant W par chacun des F_g pour $g \in I$, on obtient un voisinage de x comme désiré.

Notons $U = p(W)$. Notons que $p^{-1}(U) = \cup_{g \in \Gamma} gW$, réunion disjointe d'ouverts de E. En particulier, $p^{-1}(U)$ est ouvert, ce qui (par définition de la topologie quotient) veut dire que U est ouvert. De plus, la restriction de p à W est bijective et,

---

2. Rappelons que, pour un ensemble I, $\mathrm{Card}(I)$ est la classe d'équivalence de I pour la relation d'équivalence sur les ensembles donnée par $I \sim J$ s'il existe une bijection de I sur J. Une application est localement constante si tout point admet un voisinage sur lequel cette application est constante

3. Une action est libre si pour tout $g \in \Gamma \setminus \{1\}$, l'ensemble de ses points fixes $\{x \in E : gx = x\}$ est vide. Noter que c'est beaucoup plus restrictif qu'une action fidèle, où on impose seulement que $\{x \in E : gx = x\}$ n'est pas E tout entier.

4. Un action sur un espace topologique est topologiquement propre si pour tout $K \subset E$ compact, $\{g \in \Gamma : gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Autrement dit, $\lim_{g \to \infty} gx = \infty$ uniformément sur les compacts de E.

par ce qui vient d'être prouvé, envoie ouvert de W sur ouvert de U. Autrement dit, la restriction de p à W est un homéomorphisme sur U. Il est en de même de la restriction de p à gW, qui est la composée de $g^{-1}\colon gW \to W$ et de l'application $p\colon W \to U$. Donc U est un voisinage de $p(x)$ tel que $p^{-1}(U)$ est une réunion disjointe d'ouverts sur lesquels p est un homéomorphisme. Ceci est vrai pour tout $x \in E$. Donc p est un revêtement. □

2. Les flèches

Définition 1.3. Soit B un espace topologique. Un morphisme de revêtements entre deux revêtements $p\colon E \to B$ et $p'\colon E' \to B$ de même base B est une application continue $\varphi\colon E \to E'$ qui entrelace les projections : $p' \circ \varphi = p$. On dira que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Un morphisme de revêtements est appelé un isomorphisme si φ est un homéomorphisme. L'application φ^{-1} est alors aussi un morphisme de revêtements de p' vers p.

Si $p\colon E \to B$ est un revêtement, on notera $\mathrm{Aut}(p)$ (ou $\mathrm{Aut}(E)$ si p est implicite) l'ensemble de tous les isomorphismes de revêtements de p vers lui-même. C'est un groupe pour la composition. L'élément neutre est l'identité $E \to E$.

Exemples 1.4. Pour chacun des revêtements de Exemples 1.2, calculons son groupe d'automorphismes.

(1) *Revêtement trivial* : Si B est connexe, $\mathrm{Aut}(\mathrm{proj}\colon B \times F \to B)$ est égal au groupe $\mathrm{Sym}(F)$ des permutations de F. En particulier, si F est fini de cardinal n, $\mathrm{Aut}(\mathrm{proj})$ est de cardinal $n!$, et a le cardinal du continu si F est infini dénombrable.
(2) Exemple fondamental : $\mathrm{Aut}(x \in \mathbf{R} \mapsto e^{2i\pi x} \in \mathbf{S}^1) \simeq \mathbf{Z}$, via $k \cdot x = x + k$.
(3) Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Aut}(x \in \mathbf{R}^n \mapsto (e^{2i\pi x_k})_{1 \le k \le n} \in (\mathbf{S}^1)^n) \simeq \mathbf{Z}^n$ qui agit par translation sur $\mathbf{R}^n$.
(4) Si $k \in \mathbf{N}$ alors $\mathrm{Aut}(z \in \mathbf{C}^* \mapsto z^k \in \mathbf{C}^*) \simeq \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$, où $\alpha \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ agit par multiplication par $e^{\frac{2i\pi\alpha}{k}}$.
(5) $\mathrm{Aut}(z \in \mathbf{C} \mapsto e^z \in \mathbf{C}^*) \simeq \mathbf{Z}$ où $k \in \mathbf{Z}$ agit par $z \mapsto z + 2ik\pi$.
(6) Action propre et libre d'un groupe discret (Exemple 1.2 (6)). Si E est connexe, $\mathrm{Aut}(p\colon E \to E/\Gamma) \simeq \Gamma$.

Chacune de ces assertions mérite une preuve. Elle a été donnée en cours.

3. Espaces topologiques pointés et espaces des revêtements

On appelle *espace topologique pointé* la donnée d'une paire (E, x) avec E un espace topologique et $x \in E$. Un *revêtements d'espaces topologique pointés* (ou revêtement pointé) est la donnée d'une paire d'espaces topologiques pointés (E, x) et (B, b) et d'un revêtement $p\colon E \to B$ tel que $p(x) = b$. On définit les morphismes, isomorphismes, et automorphismes de revêtements pointés de la même manière.

On a le lemme suivant.

Lemme 1.5. *Soit $p\colon (E,x)\to(B,b)$ un revêtement pointé. Si E est connexe, alors l'identité de E est le seul endomorphisme de p (et en particulier le groupe d'automorphismes de p est réduit à l'identité $E\to E$).*

Démonstration. Soit $\varphi\colon E\to E$ une application continue qui fixe x et tel que $p\circ\varphi=p$. Considérons $A=\{y:\varphi(y)=y\}$. Clairement A est non vide (car il contient x) et fermé (ici on utilise que E est séparé). Pour conclure par connexité de E, il suffit de se convaincre que A est ouvert. Soit donc $y\in A$ et U un voisinage de trivialisation de p en $p(y)$, de sorte que $p^{-1}(U)$ est l'union disjointe d'ouverts V_i sur lesquels p est un homéomorphisme sur U. Soit i_0 l'indice tel que $y\in V_{i_0}$. Par continuité de φ, y admet un voisinage W contenu dans V_{i_0} tel que $\varphi^{-1}(W)\subset V_{i_0}$. Comme, en restriction à V_{i_0}, p est une bijection sur U, et $p\circ\varphi=p$, on obtient bien que φ est l'identité sur W. Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Le lemme précédent nous incite à se restreindre aux revêtements dont l'espace total est connexe. Une condition nécessaire pour l'existence de tels revêtements est que B est connexe.

Fixons donc un espace topologique pointé (B,b) **connexe**. Notons $\mathrm{Rev}(B,b)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtements **connexes** pointés de base (B,b).

Définition 1.6. Soient $p\colon (E,x)\to(B,b)$ et $p'\colon (E',x')\to(B,b)$ deux revêtements connexes pointés. On dit que *p est au dessus de p'* s'il existe un morphisme de revêtements $p\to p'$. Autrement dit, s'il existe une fonction continue $\varphi\colon E\to E'$ telle que $\varphi(x)=x'$ et telle que $p'\circ\varphi=p$.

Par la même preuve que le lemme précédent, si p est au dessus de p', alors le morphisme de p vers p' est unique.

Proposition 1.7. *Cela définit une relation d'ordre sur* $\mathrm{Rev}(B,b)$.

Démonstration. Il est clair que la propriété “p est au dessus de p'” dépend uniquement des classes d'isomorphisme de p et de p'. La relation “au-dessus de” passe donc aux classes d'isomorphisme. La reflexivité et la transitivité sont aussi claires. Il s'agit juste de montrer que si p est au-dessus de p' et p' est au-dessus de p, alors p et p' sont isomorphes. Soient donc $\varphi\in\mathrm{Hom}(p,p')$ et $\psi\in\mathrm{Hom}(p',p)$. Alors $\varphi\circ\psi$ est un endomorphisme de p', donc est l'identité par le lemme 1.5. De même, $\psi\circ\varphi$ est l'identité de p. En particulier φ est un homéomorphisme (d'inverse ψ), donc un isomorphisme de p sur p'. $\square$

Pour comprendre cette relation d'ordre, étudions l'exemple fondamental $(B,b)=(\mathbf{S}^1,1)$.

Exercice 1.8. Tout revêtement de $\mathbf{S}^1$ est isomorphe à l'un des revêtements suivants : $p_n\colon z\in\mathbf{S}^1\mapsto z^n$ avec $n\in\mathbf{N}^*$, ou $p_\infty\colon x\in\mathbf{R}\mapsto e^{2i\pi x}\in\mathbf{S}^1$.

De plus le revêtement p_∞ est au-dessus de tous les autres, et p_n est au-dessus de p_m si et seulement si n est un multiple de m.

Remarque 1.9. En général, si $p\colon E\to B$ est un revêtement, la décomposition de $p^{-1}(U)$ comme une union disjointes d'ouverts sur lesquels p est un homéomorphisme sur U n'est pas unique. Mais elle est unique si U est connexe (car alors les V_i sont les composantes connexes de $p^{-1}(U)$). Comme cette absence d'unicité peut être pénible, on se restreindra souvent aux espaces de base *localement connexes*, c'est-à-dire dont tout point admet une base de voisinages connexes.

À titre d'exemple, mentionnons sous forme d'exercice deux résultats qui sont vrais sous cette hypothèse de connexité locale, et faux en général (trouver un contre-exemple !).

EXERCICE 1.10. Si B est localement connexe, si φ est un morphisme de revêtements et φ est surjective, alors l'application $\varphi\colon E \to E'$ est un revêtement. [5]

EXERCICE 1.11. Si B est connexe et localement connexe et si $p\colon E \to B$ est un revêtement, alors la restriction de p à un ouvert fermé non vide de E (en particulier à une composante connexe) est un revêtement. [6]

Ce second point est particulièrement utile, car il permet de restreindre l'étude de tous les revêtements de B à l'étude des revêtements connexes. Justifions le rapidement. Soit donc $F \subset E$ une partie à la fois ouverte et fermée. Soit $b \in B$. Il existe un voisinage U de b trivialisant pour p. On peut supposer U connexe. Alors par connexité de U, $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts connexes homéomorphes à U. Comme F est ouvert et fermé, chacun de ces ouverts est soit contenu dans F soit dans son complémentaire. En particulier $p^{-1}(U) \cap F$ est une union disjointe d'ouverts homéomorphes (par p) à U. Donc $p\colon F \to B$ est un revêtement (la surjectivité $p(F) = B$ découle de la connexité de B : la fonction $b \mapsto |p^{-1}(B) \cap F|$ est localement constante, donc constante).

PROPOSITION 1.12. *Si B est connexe et localement connexe, alors toute partie finie de* $\mathrm{Rev}(B, b)$ *admet un majorant (et même une borne supérieure).*

On dit que $\mathrm{Rev}(B, b)$ est un ensemble filtrant croissant.

DÉMONSTRATION. Soit $p_i\colon (E_i, x_i) \to (B, b)$ une famille finie de revêtements connexes de B, indexée par un ensemble fini I. Considérons $E := \{(y_i)_{i\in I} \in \prod_i E_i : p_i(y_i) = p_j(y_j) \forall i, j \in I\}$, muni de la restriction de la topologie produit sur $\prod_{i\in I} E_i$, et $p\colon E \to B$ l'application qui à $(y_i)_{i\in I}$ associe la valeur commune $p_i(y_i)$. C'est clairement un revêtement de B et l'application $(y_i)_{i\in I} \mapsto y_{i_0}$ est clairement un morphisme de revêtements. Mais E n'est a priori pas connexe. On prend alors E' la composante connexe de $(x_i)_{i\in I}$ dans E, qui est bien un revêtement par l'exercice 1.11, et il reste au dessus de chaque p_i.

Remarquons que le revêtement p ainsi construit n'est pas un majorant quelconque, c'est le plus petit des majorants. En effet, si $q\colon (F, y) \to (B, b)$ est est un revêtement qui est au-dessus de chaque p_i (*via* un morphisme $\varphi_i\colon q \to p_i$), alors q est également au-dessus de p, *via* $\varphi\colon y' \mapsto (\varphi_i(y'))_{i\in I}$: il est clair que φ est continue et entrelace les projections, qu'elle prend ses valeurs dans E' découle de la connexité de F.

□

REMARQUE 1.13. Dans la preuve précédente, on a utilisé que I est fini seulement pour garantir que tout point $b \in B$ possède un voisinage de trivialisation pour chacun des p_i. On a donc prouvé si B est connexe et localement connexe et si $p_i\colon (E_i, x_i) \to (B, b)$ est une famille (éventuellement infinie) de revêtements

5. Sans l'hypothèse de connexité locale, construire un contre-exemple avec B le compactifié d'Alexandrov d'un espace infini dénombrable discret (c'est-à-dire $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^*\}$), et les revêtements triviaux $E = B \times \mathbf{N}$ et $E' = B \times \{0, 1\}$.

6. Sans l'hypothèse de connexité locale, on peut observer que le contre-exemple à l'Exercice 1.10 permet de construire un contre-exemple ici, à savoir la restriction de p à $\varphi^{-1}(B \times \{0\})$.

connexes vérifiant cette propriété, alors elle possède un majorant (et même une borne supérieure) dans $\mathrm{Rev}(B, b)$. Remarquons que cette condition est évidemment nécessaire.

4. Espaces simplement connexes

Les espaces simplement connexes sont les espaces dont tout revêtement est trivial.

DÉFINITION 1.14. Un espace topologique est dit *simplement connexe* s'il est connexe et si tous ses revêtements sont isomorphes à un revêtement trivial.

En particulier, $\mathrm{Rev}(B, b)$ est réduit à un point : les seuls revêtements connexes de B sont les homéomorphismes. Notons que si B est connexe et localement connexe, la simple connexité de B est équivalente au fait que $\mathrm{Rev}(B, b)$ est réduit à un point (Exercice 1.11).

EXEMPLES 1.15. $[0, 1]$, $[0, 1]^d$ pour $d \geq 1$, $\mathbf{R}^d$ pour $d \geq 1$, $\mathbf{S}^d$ pour $d \geq 2$ sont simplement connexes. La sphère $\mathbf{S}^1$, les tores $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ ne sont pas simplement connexes.

Justifions la simple connexité de $[0, 1]^d$, $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 1)$ et de $\mathbf{S}^d$ $(d \geq 2)$. L'énoncé élémentaire suivant, qui est un cas très particulier du théorème de van Kampen (voir Chapitre 4) nous sera utile :

LEMME 1.16. *Soit B un espace topologique connexe. Soit $p\colon E \to B$ un revêtement connexe. Si B est la réunion de deux ouverts trivialisants (U_1, U_2) dont l'intersection est connexe, alors p est trivial.*

DÉMONSTRATION. Notons qu'un revêtement connexe est trivial si et seulement s'il existe un section continue de p, c'est-à-dire une application continue $\sigma\colon B \to E$ telle que $p \circ \sigma = \mathrm{id}_B$ (exercice).

Si $U_1 \cap U_2$ est vide l'énoncé est trivial (pourquoi ?). Sinon, soit $b \in U_1 \cap U_2$ et $x \in p^{-1}(b)$. Le fait que U_1 soit trivialisant pour p nous garantit l'existence de $\sigma_1 : U_1 \to E$ continue telle que $p \circ \sigma_1 = \mathrm{id}_{U_1}$ et telle que $\sigma_1(b) = x$. De même pour U_2. De plus $\{a \in U_1 \cap U_2 : \sigma_1(a) = \sigma_2(a)\}$ est ouvert (car p est un revêtement), fermé et non vide, donc est $U_1 \cap U_2$ par connexité. Et donc on peut définir $\sigma\colon B \to E$ par $\sigma(a) = \sigma_i(a)$ si $a \in U_i$ et ainsi obtenir une section de p. Par la remarque initiale, p est trivial. □

La simple connexité de $[0, 1]$ découle de ce lemme et d'une récurrence. En effet si $p\colon E \to [0, 1]$ est un revêtement, alors par compacité on peut recouvrir $[0, 1]$ par un nombre fini d'intervalles ouverts trivialisants. On raisonne par récurrence sur le nombre de ces intervalles. S'il y en a un il n'y a rien à faire. Sinon, on peut en trouver deux qui s'intersectent, nécessairement sur un intervalle (donc connexe). Le lemme permet de les remplacer tous les deux par leur réunion, et donc de diminuer le nombre d'intervalles.

On raisonne de même pour $[0, 1]^d$: si $p\colon E \to [0, 1]^d$ est un revêtement, on peut trouver ε tel que chaque cube $(x + (0, \varepsilon)^d) \cap [0, 1]^d)$ est trivialisant. On part d'un tel cube dans un coin, et ajoute au fur et à mesure des petits cubes en parcourant des S comme dans le jeu *Snake*, de sorte que le lemme permet de garantir qu'à chaque étape le domaine obtenu est trivialisant.

Pour $\mathbf{R}^d$, on écrit $\mathbf{R}^d$ comme la réunion croissante de $[-N,N]^d$, qui sont tous homéomorphes à $[0,1]^d$, donc simplement connexes. Soit donc $p\colon E \to \mathbf{R}^d$ un revêtement, et $x \in p^{-1}(0)$. Alors pour tout N, le revêtement restreint $p_N\colon E_N := p^{-1}([-N,N]^d) \to [-N,N]^d$ est trivial, donc il existe une unique section $\sigma_N\colon [-N,N]^d \to E_N$ telle que $\sigma_N(0) = x$. L'unicité est essentielle, et découle de l'argument habituel de connexité (si on a deux telles sections, l'ensemble des points où elles coïncident est fermé, ouvert et non vide car il contient 0, c'est donc tout $[-N,N]^d$). En particulier, σ_N coïncide avec la restriction de σ_M à E_N pour tout $M \geq N$. On peut donc poser $\sigma(x) = \sigma_N(x)$ pour tout N tel que $x \in [-N,N]^d$. On obtient bien une section continue car chaque σ_N est continu. On en déduit que p est trivial.

Pour $\mathbf{S}^d$ avec $d \geq 2$, on prend pour U_1 la sphère privée d'une petite boule ouverte (ou un point si on préfère) U_2 la sphère privée d'une autre petite boule disjointe de la première. Alors U_1 et U_2 sont homéomorphes à $[0,1]^d$ (à $\mathbf{R}^d$ si on a préféré enlever un point), donc simplement connexes. Et $U_1 \cap U_2$ est connexe. Le lemme permet de conclure.

Le résultat suivant, très utile pour la suite, étudie les relèvements d'applications continues.

PROPOSITION 1.17. *Soit X un espace topologique simplement connexe et $x \in X$. Soit $p\colon E \to B$ un revêtement, et $h\colon X \to B$ une application continue et $y \in p^{-1}(h(x))$. Alors il existe une unique application continue $\widetilde{h}\colon X \to E$ telle que $\widetilde{h}(x) = y$ et $p \circ \widetilde{h} = h$*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{h}"] \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd} .$$

DÉMONSTRATION. L'unicité découle d'une argument usé à force d'être utilisé : si $\widetilde{h}_1$ et $\widetilde{h}_2$ sont deux tels relèvements, alors $\{x' \in X : \widetilde{h}_1(x') = \widetilde{h}_2(x')\}$ est fermé (X séparé), ouvert (car p est un revêtement) et non vide (il contient x). C'est donc tout X.

Pour l'existence, on introduit $F := \{(x,y) \in X \times E : p(y) = h(x)\}$ (muni de la restriction de la topologie produit sur $X \times E$) et $p\colon (x,y) \in F \mapsto x \in X$. C'est un revêtement de X. Il est donc trivial par simple connexité. En particulier il existe une section continue $\sigma\colon X \to F$. Si on écrit $\sigma(x) = (x, \widetilde{h}(x))$, alors $\widetilde{h}$ est l'application recherchée. $\square$

Le théorème suivant est très important.

THÉORÈME 1.18. *Soit B un espace topologique connexe et localement simplement connexe (c'est-à-dire que tout point admet une base de voisinages simplement connexes). Alors* $\mathrm{Rev}(B,b)$ *admet un élément maximal.*

Cet élément maximal est l'unique revêtement connexe de (B,b) dont l'espace total est simplement connexe. Il est appelé revêtement universel.

DÉMONSTRATION. Commençons par l'observation suivante : sous les hypothèses de la proposition, tout voisinage simplement connexe U de $b \in B$ est trivialisant pour tous les revêtements de B. En effet, si $p\colon E \to B$ est un revêtement, alors sa restriction $p\colon p^{-1}(U) \to U$ est un revêtement, donc est trivial.

Il suit donc de la remarque 1.13, que toute partie de $\mathrm{Rev}(B,b)$ (et en particulier $\mathrm{Rev}(B,b)$ lui-même) admet un majorant.

Notons $\widetilde{p}\colon (\widetilde{B},\widetilde{b}) \to (B,b)$ cet élément maximal. Vérifions tout d'abord qu'il est simplement connexe. Par l'Exercice 1.11, il suffit de montrer que si $p\colon (E,x) \to (\widetilde{B},b)$ est un revêtement avec E connexe, alors p est un homéomorphisme. Or $\widetilde{p}\circ p$ est un revêtement (on utilise à nouveau l'observation du début), et par construction il est au-dessus de $\widetilde{p}$. Par maximalité il est aussi au-dessous de $\widetilde{p}$. Donc par la Proposition 1.7 (E,x) et $(\widetilde{B},b)$ sont équivalents, et p est un homéomorphisme.

Si $p\colon (E,x) \to (B,b)$ est un autre revêtement d'espace total simplement connexe, alors il est en dessous de $(\widetilde{B},\widetilde{b})$ par maximalité. On obtient en particulier un revêtement $(\widetilde{B},\widetilde{b}) \to (E,x)$ d'espace total connexe. Par simple connexité ce revêtement est un homéomorphisme, et donc un isomorphisme entre p et $\widetilde{p}$. □

Remarque 1.19. Sous les hypothèses du théorème, on peut dire plus sur l'espace ordonné $\mathrm{Rev}(B,b)$: toute partie possède une borne supérieure et une borne inférieure. On dit que $\mathrm{Rev}(B,b)$ est un *treillis complet*[7]. En effet, que toute partie possède une borne supérieur est en fait le contenu de la Remarque 1.13. En appliquant ce fait à l'ensemble des minorants d'une partie donnée de $\mathrm{Rev}(B,b)$ (qui est non vide car il contient le revêtement trivial $B \to B$), on en déduit que toute partie possède aussi une borne inférieure.

5. Groupe fondamental, relèvements et correspondance de Galois

Dans cette section, on se fixe (B,b) un espace topologique connexe et localement simplement connexe, et on note $\widetilde{p}\colon (\widetilde{B},\widetilde{b}) \to (B,b)$ son revêtement universel (théorème 1.18).

Il ne reste plus qu'à récolter les fruits de nos labeurs :

Définition 1.20. Le *groupe fondamental* de (B,b), noté $\pi_1(B,b)$, est le groupe des homéomorphismes f de $\widetilde{B}$ tels que $\widetilde{p}\circ f = p$. C'est-à-dire le groupe des automorphimes du revêtement non pointé $\widetilde{p}\colon \widetilde{B} \to B$.

Proposition 1.21. *$\pi_1(B,b)$ agit librement et transitivement sur chaque fibre du revêtement universel, et le quotient est homéomorphe à B.*

Démonstration. La liberté de l'action découle du lemme 1.5. Montrons que $\pi_1(B,b)$ agit transitivement sur chaque fibre. Quitte à faire varier b, il suffit de montrer que $\pi_1(B,b)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b)$. Soient donc $\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2 \in p^{-1}(b)$. On a donc deux revêtements pointés $p_1\colon (\widetilde{B},\widetilde{b}_1) \to (B,b)$ et $p_2\colon (\widetilde{B},\widetilde{b}_2) \to (B,b)$ (la même application $\widetilde{p}$). Par le théorème 1.18 ces deux revêtements connexes représentent la même classe dans $\mathrm{Rev}(B,b)$, autrement dit il existe un isomorphisme de revêtements (c'est-à-dire un élément de $\pi_1(B,b)$) qui envoie $\widetilde{b}_1$ sur $\widetilde{b}_2$.

Cela permet donc d'identifier (comme ensembles) B et l'espace quotient de $\widetilde{B}$ par son groupe fondamental. Le fait que cette identification est un homéomorphisme découle directement du fait que $\widetilde{B} \to B$ est un revêtement. □

On en déduit le résultat absolument fondamental suivant, qui dit que π_1 se comporte bien vis-à-vis des applications continues d'une part, et des morphismes de groupes d'autre part. Si l'on s'autorisait des gros mots, on dirait que π_1 est un

7. Rappel : un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute partie *finie* possède une borne supérieure et une borne inférieure. Un treillis est dit complet si c'est vrai pour toute partie, même infinie.

foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés connexes et localement connexes dans la catégorie des groupes.

PROPOSITION 1.22. *Soient* $(B_1, b_1), (B_2, b_2)$ *deux espaces topologiques connexes et localement simplement connexes, et* $h\colon B_1 \to B_2$ *une application continue envoyant* b_1 *sur* b_2.

Soit $\widetilde{h}\colon \widetilde{B}_1 \to \widetilde{B}_2$ *l'unique application continue, donnée par la Proposition 1.17, envoyant* $\widetilde{b}_1$ *sur* $\widetilde{b}_2$ *et satisfaisant* $\widetilde{p}_2 \circ \widetilde{h} \to h \circ \widetilde{p}_1$.

Alors pour tout $f \in \pi_1(B_1, b_1)$, *il existe un unique élément de* $\pi_1(B_2, b_2)$, *noté* $h_* f$, *tel* $\widetilde{h} \circ f = h_* f \circ \widetilde{h}$. *De plus, l'application* $f \mapsto h_* f$ *définit un morphisme de groupes* $\pi_1(B_1, b_1) \to \pi_1(B_2, b_2)$.

Si $g\colon (B_2, b_2) \to (B_3, b_3)$ *est une autre application continue entre espaces topologiques pointés connexes et localement simplement connexes, alors les morphismes associés vérifient* $(gh)_* = g_* h_*$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence purement formelle de ce qu'on a prouvé. Prouvons d'abord l'existence. Considérons le point $\widetilde{h}(f(\widetilde{b}_1))$. Il appartient à $\widetilde{p_2}^{-1}(b_2)$ car

$$\widetilde{p}_2 \circ \widetilde{h} \circ f(\widetilde{b}_1) = h \circ \widetilde{p}_1 \circ f(\widetilde{b}_1) = h \circ p_1(\widetilde{b}_1) = h(b_1) = b_2.$$

Et donc par la transitivité de l'action du groupe fondamental sur les fibres (Proposition 1.21), il existe un élément $h' \in \pi_1(B_2, b_2)$ qui envoie $\widetilde{b}_2$ sur $\widetilde{h}(f(\widetilde{b}_1))$. Et alors $h'^{-1} \circ \widetilde{h} \circ f$ est, comme $\widetilde{h}$, une application continue $\widetilde{B}_1 \to \widetilde{B}_2$ qui envoie $\widetilde{b}_1$ sur $\widetilde{b}_2$ et qui relève $h \circ f\colon \widetilde{B}_1 \to B_2$. Par l'unicité d'une telle application, $h'^{-1} \circ \widetilde{h} \circ f = \widetilde{h}$. Ceci prouve l'existence de $h_* f$.

L'unicité est claire par la Proposition 1.21. Le reste des propriétés découle formellement de l'unicité de $h_* f$. □

LEMME 1.23. *Soit* (B, b) *un espace pointé connexe et localement simplement connexe, et* $p\colon (E, x) \to (B, b)$ *un revêtement. Alors* $p_*\colon \pi_1(E, x) \to \pi_1(B, b)$ *est injectif.*

DÉMONSTRATION. C'est évident, puisque p_* peut être réalisé de la manière suivante : soit $\widetilde{p}\colon (\widetilde{B}, \widetilde{b}) \to (B, b)$ le revêtement universel de (B, b). Par définition, il est au dessus de (E, x). On a donc une application $q\colon (\widetilde{B}, \widetilde{b}) \to (E, x)$ qui réalise le revêtement universel de (E, x). L'application p_* est donc l'inclusion formelle de $\pi_1(E, x)$ (réalisé comme groupe d'homéomorphismes de $\widetilde{B}$) dans $\pi_1(B, b)$, et réalise $\pi_1(E, x)$ comme le sous-groupe des éléments f de $\pi_1(B, b)$ tels que $q \circ f = q$. □

On a la correspondance suivante, qui est le résultat le plus important du cours. On parle de correspondance de Galois car ce résultat ressemble beaucoup à la correspondance de Galois pour les extensions de corps. En terme grossier, il établit une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements de B et la catégorie des sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.

THÉORÈME 1.24. *Les ensembles ordonnés*

$$\{\textit{sous-groupe de } \pi_1(B, b), \supset\} \textit{ et } \mathrm{Rev}(B, b)$$

sont isomorphes.

Plus précisément, l'application qui à un revêtement connexe pointé $p\colon (E, x) \to (B, b)$ *associe le sous-groupe* $p_*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, b)$ *établit une bijection entre*

$\mathrm{Rev}(B,b)$ *et les sous-groupes de* $\pi_1(B,b)$*. Son inverse est l'application qui à un sous-groupe* Γ *de* $\pi(B,b)$ *associe* $(\widetilde{B}/\Gamma, \Gamma\widetilde{b}) \to (B,b)$*.*

Démonstration. Le fait que $\widetilde{B}/\Gamma, \Gamma\widetilde{b}$ est un revêtement découle de la Proposition 1.21. On vérifie aisément que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre, et qu'elles préservent les relations d'ordre sur ces ensembles. □

Remarque 1.25. Dans la correspondance de Galois, l'indice du sous-groupe de $\pi_1(B,b)$ est égal au cardinal de la fibre au-dessus de chaque point dans le revêtement correspondant. En effet, comme par la proposition 1.21, chaque fibre de $\widetilde{p}\colon \widetilde{B} \to B$ est en bijection avec $\pi_1(B,b)$, chaque fibre de $\widetilde{B}/\Gamma \to B$ est en bijection avec $\pi_1(B,b)/\Gamma$, et en particulier est de cardinal le cardinal de $\pi_1(B,b)/\Gamma$, c'est-à-dire l'indice de Γ dans $\pi_1(B,b)$.

Corollaire 1.26. *Soient* $(B_1,b_1),(B_2,b_2)$ *deux espaces topologiques connexes et localement simplement connexes, et* $h\colon B_1 \to B_2$ *une application continue envoyant* b_1 *sur* b_2*. Soit* $p\colon (E,x) \to (B_2,b_2)$ *un revêtement connexe.*

Alors h *admet un relèvement*

$$\begin{tikzcd} & (E,x) \arrow[d, "p"] \\ (B_1,b_1) \arrow[ur, "\widetilde{h}"] \arrow[r, "h"] & (B_2,b_2) \end{tikzcd}$$

si et seulement si $h_*(\pi_1(B_1,b))$ *est un sous-groupe de* $p_*(\pi_1(E,x))$*.*

Démonstration. Une direction est claire : si h admet un relèvement, alors $h_* = p_* \circ \widetilde{h}_*$ et donc $h_*(\pi_1(B_1,b)) \subset p_*(\pi_1(E,x))$.

Pour la réciproque, considérons les revêtements universels $\widetilde{p}_i\colon (\widetilde{B}_i,\widetilde{b}_i) to (B_i,b_i)$, et $\widetilde{h}_0\colon \widetilde{B}_1 \to \widetilde{B}_2$ l'unique relèvement de $h \circ \widetilde{p}_1$, donné par la Proposition 1.17.

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{B}_1,\widetilde{b}_1) \arrow[r, "\widetilde{h}_0"] \arrow[dd, "\widetilde{p}_1"] & (\widetilde{B}_1,\widetilde{b}_1) \arrow[d, "q"] \\ & (E,x) \arrow[d, "p"] \\ (B_1,b_1) \arrow[r, "h"] & (B_2,b_2) \end{tikzcd}$$

Clairement $\widetilde{h}$ existe si et seulement si $q(\widetilde{h}_0(y))$ ne dépend que de $\widetilde{p}_1(y)$, ou (par la Proposition 1.21) si et seulement si $q \circ \widetilde{h}_0 \circ f = q \circ \widetilde{h}_0$ pour tout $f \in \pi_1(B_1,b_1)$. Comme, par la définition de h_*, $\widetilde{h}_0 \circ f = (h_* f) \circ \widetilde{h}_0$, on a donc que $\widetilde{h}$ existe si et seulement si $q \circ g = q$ pour tout $g \in h_*(\pi_1(B_1,b))$. Cela permet de conclure car, par construction, $p_*(\pi_1(E,x))$ est le sous-groupe constitué des éléments g de $\pi_1(B_1,b_1)$ tels que $q \circ g = q$. □

Finissons par une propriété importante.

Proposition 1.27. *Soit* $p\colon (E,x) \to (B,b)$ *un revêtement connexe. Alors le groupe d'automorphismes du revêtement non pointé* p *agit transitivement sur les fibres si et seulement si* $p_*(\pi_1(E,x))$ *est un sous-groupe distingué de* $\pi_1(B,b)$*.*

Dans ce cas, ce groupe d'automorphismes s'identifie naturellement avec le quotient $\pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, x))$.

DÉFINITION 1.28. Un revêtement satisfaisant ces propriétés est appelé *revêtement galoisien*.

Pour résumer, la correspondance de Galois se restreint en une bijection entre les revêtements galoisiens de B et les sous-groupes distingués de $\pi_1(B, b)$.

Chapitre 2

Groupe fondamental par homotopie

1. Homotopie

DÉFINITION 2.1. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f_0, f_1 \colon X \to Y$ deux applications continues. On dit que f_0 *est homotope à* f_1 s'il existe une application continue $H \colon X \times [0,1] \to Y$ telle que $H(x,0) = f_0(x)$ et $H(x,1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$.

H est appelée une homotopie de f_0 à f_1.

Informellement, f_0 est homotope à f_1 si f_0 peut être déformée continûment dans Y en f_1, la déformation continue étant la famille $f_t = H(\cdot, t)$.

La relation *est homotope à* est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues $X \to Y$ (exercice !). On se permettra donc de dire que f_0 et f_1 sont homotopes si f_0 est homotope à f_1. Remarquons que l'espace Y est très important : l'identité $\{0,1\} \to \{0,1\}$ n'est pas homotope à la fonction constante $\{0,1\} \to 0$, mais elle est homotope si on remplace l'espace d'arrivée $\{0,1\}$ par l'espace plus gros $[0,1]$.

EXEMPLE 2.2. Si $Y = \mathbf{R}^n$, ou Y est une partie convexe d'un espace vectoriel normé, alors tous $f_0, f_1 \colon X \to Y$ sont homotopes. En effet, il suffit d'aller tout droit : $H(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$.

EXEMPLE 2.3. Si $Y = \mathbf{R}^n$ est la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$, et si $f_0, f_1 \colon X \to Y$ sont deux applications continues telles que $f_0(x) \neq -f_1(x)$ pour tout $x \in X$, alors f_0 et f_1 sont homotopes. En effet, $H(x,t) = \frac{tf_1(x)+(1-t)f_0(x)}{\|tf_1(x)+(1-t)f_0(x)\|}$ est une homotopie de f_0 à f_1.

L'exemple suivant est moins anodin qu'il n'y paraît :

EXEMPLE 2.4. L'application $\mathrm{id} \colon \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ n'est pas homotope à une constante.

Pour $n = 0$, c'est évident car $\mathbf{S}^0 = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe.

Supposons $n > 1$. Alors l'exemple est équivalent à dire qu'il n'existe pas de fonction continue r de B^{n+1} (la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$) vers $\mathbf{S}^n$ qui est l'identité sur $\mathbf{S^n}$ (un tel r est appelé un rétraction de B^{n+1} sur $\mathbf{S}^n$). En effet, si H est une telle homotopie, l'application $r(x) = H(\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$ si $x \neq 0$ et étendue par continuité en 0 serait une rétraction. Et réciproquement une rétraction donne lieu à une homotopie $H(t,x) = r(tx)$.

D'autre part, l'existence d'une rétraction (et donc l'exemple précédent) est équivalente au théorème fameux suivant :

THÉORÈME 2.5 (Théorème de Brouwer). *Si $n \geq 1$, toute application continue $B^{n+1} \to B^{n+1}$ a un point fixe.*

En effet, le théorème de Brouwer implique qu'une telle rétraction r n'existe pas (sinon $-r$ serait une application continue sans point fixe), et réciproquement si $f\colon B^{n+1} \to B^{n+1}$ était une application continue sans point fixe, alors l'application $r(x) =$ l'unique point de la sphère sur la demi-droite $[x, f(x)($, étendue par continuité en l'identité sur la sphère, serait une rétraction de la boule sur la sphère.

Le théorème de Brouwer a une preuve assez facile si $n = 1$ puisqu'on peut utiliser l'analyse complexe. En effet, identifiant $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$, on peut voir $\mathbf{S}^1$ comme la sphère unité dans $\mathbf{C}$. Si H était une homotopie d'une constante cers id, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on pourrait définir la lacet $\gamma_t(x) = H(x, t)$. Comme γ_t ne passe pas par 0, on peut définir son indice relativement à 0. C'est un nombre entier qui dépend continûment de t (continuité d'une intégrale à paramètre). Il vaut 0 pour $t = 0$, et 1 pour $t = 1$. La preuve est bien plus difficile pour $n > 1$. On ne la verra pas dans ce cours.

Revenons aux choses très élémentaires.

Proposition 2.6. *Si $f_0, f_1\colon X \to Y$ sont homotopes et $g_0, g_1\colon Y \to Z$ sont homotopes, alors $g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1\colon X \to Z$ sont homotopes.*

Démonstration. Définir $H(t, x) \mapsto G(t, F(t, x))$ si F (respectivement G) est une homotopie de f_0 à f_1 (resp g_0 à g_1). $\square$

Définition 2.7. Deux espaces topologiques X et Y ont *même type d'homotopie* s'il existe deux applications continues $\varphi\colon X \to Y$ et $\psi\colon Y \to X$ telles que $\psi \circ \varphi$ est homotope à id_X et $\varphi \circ \psi$ est homotope à id_Y.

Exemples 2.8.
— $\mathbf{R}^n$ a le même type d'homotopie qu'un point.
— $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ a le même type d'homotopie que $\mathbf{S}^{n-1}$ (prendre $\varphi\colon x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ et $\psi\colon x \in \mathbf{S}^{n-1} \mapsto x$).

Remarquons que, par la proposition précédente, avoir même type d'homotopie est une relation d'équivalence, qui est moins fine que *être homéomorphe*. De plus, si X et Y ont même type d'homotopie, alors pour tout espace Z, l'application qui à une fonction continue $f\colon Z \to X$ associe $\varphi \circ f\colon Z \to Y$ passe à une bijection de l'ensemble des classes d'homotopies de fonctions continues $Z \to X$ vers l'ensemble des classes d'homotopies de fonctions continues $Z \to Y$. Son inverse est $g\colon Z \to Y \mapsto \psi \circ g$.

Définition 2.9. Un espace est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point.

Autrement dit, un espace X est contractile s'il existe $x \in X$ (ou de manière équivalente pour tout $x \in X$) tel que l'identité $X \to X$ est homotope à la fonction constante égale à x.

Par exemple, $\mathbf{R}^n$, ou une partie convexe d'un espace vectoriel normé est contractile.

2. Homotopie relative et chemins

Définition 2.10. Soit $A \subset X$, et $f, g\colon X \to Y$ deux fonctions continues qui coïcident sur A. On dit que f et g sont *homotopes relatives à A* s'il existe une homotopie H de f à g vérifiant $H(t, x) = f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$ et $t \in [0, 1]$.

On parle d'homotopie libre pour la notion de la Définition 2.1, qui correspond à l'homotopie relative à l'ensemble vide. De même que pour l'homotopie libre, l'homotopie relative à A définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions continues $X \to Y$ prenant des valeurs prescrites sur A.

Définition 2.11. Un *chemin* dans un espace topologique X est une fonction continue $\gamma\colon [0,1] \to X$. Le point $\gamma(0)$ est appelé son origine, et $\gamma(1)$ son extrémité. On dit aussi que γ est un chemin de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$. On notera c_x le chemin constant égal à x.

Un *lacet* est un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident.

Deux chemins sont dit homotopes s'ils ont les mêmes origines et mêmes extrémité et s'ils sont homotopes relativement à $\{0,1\}$.

Pour tout $x, y \in X$, c'est une relation d'équivalence sur les chemin d'origine x et d'extrémité y.

Si γ_1 est un chemin de x à y et γ_2 est un chemin de y à z, on peut composer, ou enchaîner ces deux chemins pour obtenir un nouveau chemin de la manière suivante :

$$\gamma_2\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Attention : cette opération n'a quasiment aucune bonne propriété. En particulier, elle n'est pas associative. Par contre, cela devient vrai si on passe aux classes d'homotopie de chemin.

Proposition 2.12. *Soient γ_1, γ_1' deux chemins de x à y, γ_2, γ_2' des chemins de y à z. Si γ_1 est homotope à γ_1' et si γ_2 est homotope à γ_2' sont homotopes, alors $\gamma_2\gamma_1$ est homotope à $\gamma_2'\gamma_1'$.*

Si, pour $i = 1, 2, 3$, γ_i est un lacet de x_i à x_{i+1}, alors $\gamma_3(\gamma_2\gamma_1)$ est homotope à $(\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$.

Démonstration. Si H_1, H_2 sont des homotopies, alors

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(s, 2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

est une homotopie de $\gamma_1\gamma_2$ à γ_1' à γ_2'.

Le deuxième point est plus pénible à écrire qu'à comprendre. On le laisse en exo. □

Le problème qu'il reste est qu'on ne peut pas composer toute paire de chemins (le gros mot est que l'ensemble des classes d'homotopies de chemins est un groupoïde). Pour ne pas utiliser des gros mots, on se fixe un point $x \in X$ et on ne va considérer que l'ensemble des classes d'homotopies de lacets d'origine et d'extrémité x. Cet ensemble est un groupe, et on verra que dans les cas favorables, il coïncide avec le groupe fondamental tel que défini précédemment. En attendant, on le note $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X, x)$.

Proposition 2.13. *$\pi_1^{\mathrm{lac}}(X, x)$ est un groupe pour la concaténation des lacets. L'élément neutre est la classe d'homotopie de c_x, et l'inverse de la classe de γ est la classe de $\overline{\gamma}\colon t \mapsto \gamma(1-t)$.*

Démonstration. Exercice. □

Heureusement, la classe d'isomorphisme de $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$ ne dépend pas de x lorsque X est connexe par arcs.

PROPOSITION 2.14. *Si c est un chemin de x à y, alors l'application qui à la classe d'homotopie d'un lacet γ en x associe la classe d'homotopie du lacet $c(\gamma\overline{c})$ réalise un isomorphisme de $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$ sur $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,y)$.*

Mais attention, l'isomorphisme ci-dessus n'est pas canonique : il dépend du chemin c. C'est pour cela qu'on précise que *la classe d'isomorphisme* de $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$ ne dépend pas de x.

PROPOSITION 2.15. *Si X est contractile, alors pour tout $x \in X$, $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$ est trivial.*

DÉMONSTRATION. Soit $F\colon X \times [0,1] \to X$ une homotopie de id à la fonction constante x_0.

Comme la classe d'ismorphisme de $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$ ne dépend pas de x, on peut supposer $x_0 = x$. Soit donc γ un lacet d'origine x_0. On voudrait définir une homotopie $G(s,t) = F(\gamma(s),t)$, mais ce n'est a priori pas une homotopie de chemin car le lacet $G_t := G(\cdot,t)$ a pour origine et extrémité $G(0,t) = G(1,t) = F(x_0,t)$, qui n'est pas fixée. On corrige cela de la manière suivante. On définit le chemin η_t de x_0 à $F(x_0,t)$ par $\eta_t(s) = F(x_0,st)$, et on définit le lacet en x_0 $H_t := \overline{\eta_t}(G_t\eta_t)$, la concaténation des chemins. C'est une homotopie de chemins de γ au lacet $\overline{\eta_t}(c_{x_0}\eta_t)$, qui est lui-même homotope au lacet trivial par la Proposition 2.13. Cela prouve que $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x_0)$ est trivial. $\square$

Un espace topologique est dit *localement contractile* si tout point admet un système fondamental de voisinages contractiles.

Commençons par un résultat qui nous sera utile dans différents contextes.

LEMME 2.16. *Soit $p\colon (E,y) \to (X,x)$ un revêtement. Tout chemin $\gamma\colon [0,1] \to X$ d'origine x admet un unique relèvement $\widetilde{\gamma}$ d'origine y. De plus, son extrémité $\widetilde{\gamma}(1)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.*

DÉMONSTRATION. L'existence et unicité de $\widetilde{\gamma}$ découle de la simple connexité de $[0,1]$ et de la Proposition 1.17. Reste à voir que son extrémité ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Soit donc γ' un lacet homotope à γ par une homotopie H. En utilisant que $[0,1]^2$ est simplement connexe, on peut relever H en une application continue $\widetilde{H}\colon [0,1]^2 \to E$ vérifiant $H(0,0) = y$. La restriction de $\widetilde{H}$ au côté $\{(0,s) : s \in [0,1]\}$ du carré est un relèvement du chemin c_x, donc par unicité c'est le chemin c_y. De même,

— la restriction de $\widetilde{H}$ à $\{(t,0) : t \in [0,1]\}$ est un relevé du chemin γ d'origine x, donc coïncide avec $\widetilde{\gamma}$.
— la restriction de $\widetilde{H}$ à $\{(t,1) : t \in [0,1]\}$ est un relevé du chemin γ' d'origine x, donc coïncide avec $\widetilde{\gamma}'$.
— la restriction de $\widetilde{H}$ à $\{(1,s) : s \in [0,1]\}$ est un relevé du chemin $c_{\gamma(1)}$ d'origine $\widetilde{\gamma}(1)$, donc coïncide avec $c_{\widetilde{\gamma}(1)}$.

En particulier, $H(1,1)$ est d'une part égal à $\widetilde{\gamma}(1)$ et d'autre par à $\widetilde{\gamma}'(1)$. On a bien montré que $\widetilde{\gamma}'(1) = \widetilde{\gamma}(1)$, comme requis. $\square$

LEMME 2.17. *Si X est connexe par arcs et localement connexe par arcs, et si $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$ est le groupe trivial, alors X est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit $p\colon E \to X$ un revêtement, et $y \in p^{-1}(x)$. Pour tout point $x' \in X$ on choisit un lacet γ de x à x' et on définit $\sigma(x') = \widetilde{\gamma}(1)$. Comme deux lacets de mêmes origine et extrémité sont homotopes dans X, le lemme 2.16 implique que $\sigma(x')$ est indépendant du choix de γ. Il suit que cette application est continue, car si x'' est proche de x', on peut choisir pour lacet de x à x'' la concaténation de x à x' et d'un lacet de x' à x'' qui reste proche de x' (ce qui est possible car X est localement connexe par arcs). C'est donc une section de $p\colon E \to X$. On a donc trouvé, pour tout point y de $p^{-1}(x)$, une section de p qui envoie x sur y. Cela prouve que p est trivial, et donc que X est simplement connexe. □

REMARQUE 2.18. Comme $[0,1]^d$ et $\mathbf{R}^d$ sont contractiles, le lemme 2.17 donne une nouvelle preuve que ces espaces sont simplement connexes. Remarquons cependant que la preuve du lemme utilise que $[0,1]^2$ est simplement connexe... On a donc trouvé une preuve "soft" de l'implication $[0,1]^2$ simplement connexe implique $\mathbf{R}^d$ et $[0,1]^d$ sont simplement connexes pour tout $d \geq 1$.

COROLLAIRE 2.19. *Un espace topologique connexe et localement contractile est localement simplement connexe. En particulier il admet un revêtement universel, et les résultats du premier chapitre s'appliquent.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la Proposition 2.15 et du lemme 2.17. Il faut simplement justifier que connexe+localement connexe par arcs implique connexe par arcs (car la composante connexe par arcs d'un point est ouverte). □

On peut enfin énoncer et prouver le théorème principal de ce chapitre, qui identifie $\pi_1(X,x)$ avec $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$. On notera que la preuve est vraiment pénible.

THÉORÈME 2.20. *Soit (X,x) un espace connexe et localement contractile. Alors son groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ est bien défini, et coïncide avec $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$.*

DÉMONSTRATION. Par le Corollaire 2.19, X est localement simplement connexe, donc son revêtement fondamental est bien défini. Notons le $\widetilde{p}\colon (\widetilde{X},\widetilde{x}) \to (X,x)$.

Par le lemme 2.16, tout lacet dans X d'origine x peut être relevé de manière unique en un chemin d'origine $\widetilde{x}$, et son extrémité $\widetilde{\gamma}(1)$ ne dépend que de la classe de γ dans $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$. Par la Proposition 1.21, il existe un unique élément f_γ de $\pi_1(\gamma,x)$ tel que $f_\gamma(\widetilde{\gamma}(1)) = \widetilde{x}$. L'application $\gamma \mapsto f_\gamma$ passe aux classes d'homotopies de lacet, et définit un morphisme de groupes $\alpha\colon \pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x) \to \pi_1(X,x)$. Il s'agit de montrer que ce morphisme de groupes est un isomorphisme.

Montrons d'abord qu'il est surjectif. Comme $\widetilde{X}$ est localement connexe par arcs, ses composantes connexes par arcs sont ouvertes, et donc X est connexe par arcs. Soit $f \in \pi_1(X,x)$. Alors il existe un chemin c dans $\widetilde{X}$ de $\widetilde{x}$ à $f^{-1}(\widetilde{x})$. Son image dans X est un lacet γ d'origine x, dont l'unique relevé issu de $\widetilde{x}$ est c (par construction). Donc $f = \alpha(\gamma)$ et α est surjective.

L'injectivité est plus difficile. Il s'agit de définir un revêtement à partir des lacets. On définit donc E comme l'ensemble des classes d'homotopie de chemins d'origine x. Toute la difficulté est de définir une topologie sur E qui fasse de $p\colon [\gamma] \in E \mapsto \gamma(1) \in X$ un revêtement connexe de E. Si on admet l'existence d'une telle topologie, on conclut aisément, puisque le lemme 2.16 dira alors que p est au-dessus de $\widetilde{E}$, donc coïncide avec le revêtement universel de X. Et donc α est injective, puisque α correspond à l'identification de la fibre de x dans E (qui est par définition $\pi_1^{\mathrm{lac}}(X,x)$) avec la fibre de x dans E (qui est en bijection avec la fibre de x dans $\widetilde{X}$ par la Proposition 1.21).

La topologie sur E est définie de la manière suivante. On définit tout d'abord sur l'espace des chemins $[0,1] \to X$ d'origine x la topologie compacte-ouverte, c'est-à-dire la topologie engendrée par les ouverts fondamentaux $V(K,U) = \{\gamma : \gamma(K) \subset U\}$ pour $K \subset [0,1]$ compact et $U \subset X$ ouvert. Puis on munit E, le quotient de cet espace par la relation d'homotopie de chemins, de la topologie quotient. L'hypothèse de contractivité locale implique que cet espace est bien un revêtement connexe de X. $\square$

Chapitre 3

Cas des graphes

On sait tous ce qu'est un graphe : une collection de sommets, reliés par des arêtes. On peut voir ça de manière purement combinatoire mais aussi géométriquement : une collection de copies d'intervalles $[0,1]$, recollés selon leurs extrémités.

Il y a cependant plusieurs variantes, selon qu'on autorise les arêtes multiples, les boucles (arêtes qui ont les mêmes extrémités), ou que l'on considère les arêtes orientées ou pas. Dans le contexte des revêtements et groupes fondamentaux, il est naturel d'autoriser les arêtes multiples et les boucles, et de ne pas orienter les arêtes. Voici une formalisation possible.

DÉFINITION 3.1. Un *graphe orienté* est la donnée d'un ensemble V, *les sommets* (vertex), d'un ensemble $\vec{E}$, *les arêtes* (edge), et de deux applications $S, T\colon \vec{E} \to V$ (respectivement *l'origine* (source) et *l'arrivée* (target).

Un graphe (ou *graphe non orienté*) est la donnée d'un graphe orienté et d'une involution sans point fixe de $\vec{E}$, notée $e \mapsto \overline{e}$, vérifiant $S(\overline{e}) = T(e)$ (et donc $T(\overline{e}) = S(e)$) pour toute $e \in \vec{E}$. On notera E l'ensemble $\{\{e, \overline{e}\} \mid e \in \vec{E}\}$ des arêtes non orientées.

Étant donné un graphe combinatoire, on peut lui associer une réalisation géométrique, obtenue prenant autant de copies de l'intervalle $[0,1]$ que d'arêtes non orientées et en recollant leurs extrémités selon la combinatoire donnée par le graphe. Si on veut être formel, la réalisation géométrique du graphe est le quotient de $[0,1] \times \vec{E}$ par la relation d'équivalence engendrée par $(s,e) \sim (1-s, \overline{e})$ pour tout $s \in [0,1]$ et $e \in \vec{E}$ et $(0,e) \sim (0,f)$ pour tout $e, f \in \vec{E}$ tels que $S(e) = S(f)$. On obtient ainsi un espace métrique pour la distance induite (la plus grande distance dont la restriction à chaque segment $[0,1]$ est plus petite que la distance usuelle), et en particulier un espace topologique. Il est localement homéomorphe à un segment ou bien à une union de segments recollés le long de leur extrémité. Donc il en particulier, **il est localement contractile**. On peut donc lui appliquer les résultats des chapitres précédents : il admet un revêtement universal, et son groupe fondamental admet deux descriptions équivalentes, comme groupe d'automorphismes du revêtement universel ou bien en terme de lacets.

EXEMPLES 3.2. Un bouquet de n cercles est la donnée de n cercles recollés en un point commun. De manière combinatoire, c'est le graphe donné par $V = \{\cdot\}$ et $\vec{E}$ de cardinal $2n$.

DÉFINITION 3.3. Un revêtement de graphes combinatoires $p\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ est une paire d'applications $p_V\colon V' \to V$ et $p_E\colon E' \to E$ compatible avec la structure de graphe (c'est-à-dire $S \circ p_E = p_V \circ S$ et $p_E(\overline{e'}) = \overline{p_E(e')}$) et telle que p_E induit une bijection de $\mathcal{V}(v') = \{e' \in E' \mid S(e') = v'\}$ sur $\mathcal{V}(p_V(v'))$.

Cette notion est compatible avec la notion topologique :

Lemme 3.4. *Un revêtement de graphes combinatoires au sens de la définition 3.3 induit un revêtement au sens de la définition 1.1 des réalisations géométriques. De plus, tout revêtement $p\colon E \to \mathcal{G}$ de la réalisation géométrique d'un graphe $\mathcal{G}$ est de cette forme : il existe un graphe combinatoire $\mathcal{G}'$ dont la réalisation géométrique est homéomorphe à E, et une revêtement $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ qui induit $p\colon E \to \mathcal{G}$.*

Démonstration. Exercice. □

Finalement, la dernière définition importante est celle d'arbre.

Définition 3.5. Un *chemin combinatoire* de longueur $n \in \mathbf{N}$ dans un graphe est une suite $e_1, \dots, e_n \in \vec{E}$ telle que $S(e_{i+1}) = T(e_i)$. On dit qu'un tel chemin relie un sommet x à un sommet y lorsque $S(e_1) = x$ et $T(e_n) = y$. Un tel chemin est dit *réduit* si $e_{i+1} \neq \overline{e_i}$ pour tout i, et est appelé un *lacet combinatoire* si $S(e_1) = T(e_n)$.

Un graphe est dit connexe si toute paire de sommets distincts est reliée par un chemin combinatoire.

Un *arbre* est un graphe connexe sans lacet réduit de longueur > 0

On vérifie bien sûr qu'un graphe est connexe au sens précédent si et seulement si sa réalisation topologique est connexe.

Proposition 3.6. *Un graphe est un arbre si et seulement si sa réalisation topologique est simplement connexe. Dans ce cas, elle est même contractile.*

Démonstration. On vérifie que, dans la réalisation géométrique d'un arbre, toute paire de points x, y est reliée par une unique géodésique, c'est-à-dire une application $\gamma_{x,y}\colon [0,1] \to \mathcal{G}$ telle que $\gamma_{x,y}(0) = 0$, $\gamma_{x,y}(1) = y$ et $d(\gamma_{x,y}(s), \gamma_{x,y}(t)) = |s-t| d(x,y)$. On obtient qu'elle est contractile en choisissant un point x_0 et en considérant l'homotopie $H(x,s) = \gamma_{x_0,x}(s)$.

Pour la réciproque, on démontre l'énoncé suivant : tout graphe connexe est revêtu par un arbre connexe. Par le lemme précédent, cela implique qu'un graphe simplement connexe est un arbre. Pour cela, on s'inspire de la preuve du théorème 2.20. On se fixe un sommet v_0, et on définit un arbre de la manière suivante. L'ensemble des sommets est l'ensemble des chemins réduits issus de v_0 (on inclut le chemin de longueur 0, que par convention on considère comme un chemin issu de v_0). On met une arête entre $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$ (donc par convention, il y a une arête entre le chemin de longueur 0 et tout chemin de longueur 1 issu de v). C'est clairement un arbre sans arête multiple ni boucle, et l'application $(e_1, \dots, e_n) \mapsto T(e_n)$ (comprise comme $\emptyset \mapsto v_0$ lorsque $n = 0$) est un revêtement du graphe. □

Définition 3.7. Si S est un ensemble, on définit le groupe libre F_S comme le groupe fondamental d'un bouquet de S cercles. À toute orientation des S cercles vient naturellement une partie $\{a_s \mid s \in S\}$ de F_S.

Lorsque $S = \{1, \dots, n\}$, on notera $F_S = F_n$.

Théorème 3.8. *Le groupe fondamental de tout graphe connexe est un groupe libre.*

Plus précisément, le groupe fondamental d'un graphe connexe fini est isomorphe à $F_{|E|-|V|+1}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe, de sommets V et d'arêtes non orientées E. Soit $v_0 \in V$ un sommet. J'affirme qu'il existe un sous-arbre couvrant, c'est-à-dire un arbre dont l'ensemble des sommets est V et dont l'ensemble des arêtes est une partie de E. C'est assez clair lorsque le graphe est fini, en général on a besoin d'une forme de l'axiome du choix pour le justifier. On considère l'ensemble de tous les sous-arbres de $\mathcal{G}$, ordonné par l'inclusion. Toute chaîne croissante admet un majorant (une union croissante d'arbres reste un arbre), donc le lemme de zorn permet de conclure qu'il existe un sous-arbre maximal, nécessairement non vide. S'il n'était pas convrant, par connexité de $\mathcal{G}$ il existerait une arête dans $\mathcal{G}$ qui relie un sommet de ce sous-arbre maximal à un sommet en dehors. En l'ajoutant on obtiendrait un sous-arbre plus grand, ce qui contredirait la maximalité.

Étant donne un tel sous-arbre couvrant $\mathcal{T}$ (d'ensemble d'arêtes $\vec{F} \subset \vec{E}$), considérons le graphe obtenu est contractant en un point toutes ses arêtes et en conservant les arêtes restantes. Formellement, il s'agit du graphe noté $\mathcal{B}$ avec un seul sommet b et pour ensemble d'arêtes $\vec{E} \setminus \vec{F}$. C'est donc un bouquet de cercles, et les cercles sont indexées par $E \setminus F$. Le point important, c'est qu'il y a application h continue naturelle de la réalisation topologique de $\mathcal{G}$ vers ce bouquet de cercle telle que h_* induit un isomorphisme de $\pi_1(\mathcal{G}, v_0)$ vers le groupe fondamental du bouquet de cercle, c'est-à-dire $F_{E\setminus F}$. L'application h est celle qui envoie tous les points des arêtes dans F sur l'origine du bouquet de cercle, et qui envoie injectivement chaque arête de $F \setminus E$ sur l'arête correspondante du bouquet de cercle.

Justifions que h_* induit bien un isomorphisme. On peut raisonner en terme de lacets ou de revêtements, au choix. Faisons-le en terme de revêtement. Soit $\widetilde{p}\colon (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{v_0}) \to (\mathcal{G}, v_0)$ le revêtement universel. On peut voir $\tilde{\mathcal{G}}$ comme un graphe par le lemme 3.4, et il s'agit même d'un arbre par la proposition 3.6. Comme $\mathcal{T}$ est simplement connexe, la restriction de $\widetilde{p}$ à $\mathcal{T}$ est triviale : $\widetilde{p}^{-1}(T)$ est une union disjointe d'arbres ; quand on contracte chacun de ces arbres en un point, on obtient un arbre qui revêt le bouquet de cercle, c'est donc le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$, et l'application de contraction $\widetilde{\mathcal{G}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ n'est autre que l'application $\widetilde{h}$ donnée par la Proposition 1.17. Par construction, $\widetilde{h}$ établit une bijection entre la fibre de v_0 et la fibre de b. Cela veut donc dire que l'application h_* induit un isomorphisme entre $\pi_1(\mathcal{G}, v_0)$ et $\pi_1(\mathcal{B}, b)$, ce qu'il fallait démontrer.

Lorsque $\mathcal{G}$ est fini, la preuve donne que $\pi_1(\mathcal{G}, v_0)$ est un groupe libre à $|E| - |F|$ générateurs, où $|F|$ est le nombre d'arêtes non orientées contenu dans un sous-arbre couvrant de $\mathcal{G}$. On montre par récurrence sur $|V|$ que ce nombre d'arêtes est égal à $|V| - 1$. □

COROLLAIRE 3.9. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.*

Et même, un sous-groupe d'indice fini k de F_n est isomorphe à F_m pour $m-1 = k(n-1)$.

DÉMONSTRATION. Par la correspondance de Galois, tout sous-groupe d'un groupe libre F_S peut être réalisé comme le groupe fondamental d'un revêtementement à S cercles, et donc d'un graphe. Le théorème précédent permet de conclure.

Plus précisément, un sous-groupe d'indice fini k de F_n est le groupe fondamental d'un revêtement d'ordre k d'un bouquet à n cercles, qui est donc constitué de k sommets et kn arêtes. Le théorème permet donc de conclure. □

Chapitre 4

Théorème de van Kampen

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème de van Kampen, qui donne une recette utile pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique en le découpant en pièces plus simples. Un cas particulier a déjà été énoncé et démontré dans le premier chapitre (lemme 1.16).

J'ai fait le choix de rédiger ce chapitre dans l'esprit du chapitre 1 et donc de manière totalement indépendante du chapitre 2, mais un lecteur qui préfèrerait l'approche concrète au groupe fondamental est invité à faire l'exercice de redémontrer les énoncés de ce chapitre en manipulant des chemins et lacets. Le lecteur perdu peut aussi regarder `http://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Le-s-theoreme-s-de-van-Kampen-.html` où la preuve avec les chemins et des vidéos est donnée.

Le cadre est le suivant : soit X un espace topologique connexe et localement simplement connexe (par exemple localement contractile), et U_1, U_2 deux ouverts connexes qui recouvrent X tels que $U_1 \cap U_2$ est connexe. Le théorème de von Kampen décrit le groupe fondamental de X en termes des groupes fondamentaux des pièces U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$. L'énoncé demande de mettre en place certaines définitions de théorie des groupes, mais nous pouvons déjà énoncer un résultat facile. Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Notons $i_1 \colon \pi_1(U_1, x) \to \pi_1(X, x)$ et $i_2 \colon \pi_1(U_2, x) \to \pi_1(X, x)$ les morphismes induits par les inclusions $U_1 \subset X$ et $U_2 \subset X$ (Proposition 1.22).

LEMME 4.1. *$i_1(\pi_1(U_1, x)) \cup i_2(\pi_1(U_2, x))$ engendre $\pi_1(X, x)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\widetilde{p}\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x})$ le revêtement universel de X. Soit H le sous-groupe de $\pi_1(X, x)$ egendré par $i_1(\pi_1(U_1, x)) \cup i_2(\pi_1(U_2, x))$.

Notons $Z_1 \subset \widetilde{p}^{-1}(U_1)$ la réunion des composantes connexes dans $\widetilde{p}^{-1}(U_1)$ de $h\widetilde{x}$ pour $h \in H$, et Z_2 la même chose pour U_2, et Z_{12} la même chose pour $U_1 \cap U_2$. Par connexité de $U_1 \cap U_2$, Z_{12} coïncide avec l'intersection de Z_1 avec $\widetilde{p}^{-1}(U_1)$ et pareil pour Z_2. On en déduit que $Z_1 \cup Z_2$, qui est clairement ouvert, est également fermé. Et donc, par connexité, $Z_1 \cup Z_2 = \widetilde{X}$. En particulier, pour tout $g \in \pi_1(X, x)$, $g\widetilde{x}$ appartient à Z_{12}, et donc appartient à la $i_{12}(\pi_1(U_1 \cap U_2, x))$-orbite de $H\widetilde{x}$, qui est $H\widetilde{x}$. On en déduit que $g \in H$ et donc que $H = \pi_1(X, x)$ par la Proposition 1.21. □

1. Groupes libres, produits libres et produits libres amalgamés

Rappelons une définition possible des groupes libres, par propriété universelle. Une définition concrète a été donnée en travaux dirigée. La correspondance de Galois permet de justifier que la définition coïncide avec celle donnée dans la définition 3.7.

DÉFINITION-PROPOSITION 4.2. *[Groupes libres] Soit S un ensemble. Il existe un groupe F engendré par une famille $(a_s)_{s \in S}$ et tel que pour tout groupe G et toute* *fonction* $f\colon S \to G$, *il existe un unique morphisme de groupes* $\varphi_f\colon F \to G$ *qui étend* f, *c'est-à-dire tel que* $\varphi_f(a_s) = f(s)$.

De plus $(F, (a_s)_{s\in S})$ *est unique à unique isomorphisme près : si* $(F', (a'_s)_{s\in S})$ *est un autre tel groupe, il existe un unique isomorphisme entre* F *et* F' *envoyant* a_s *sur* a'_s. *On notera donc ce groupe* F_S, *et appellera groupe libre sur* S.

Démonstration. L'unicité à unique isomorphisme près est claire : si $(F, (a_s)_{s\in S})$ et $(F', (a'_s)_{s\in S})$ vérifient tous les deux la propriété universelle, alors cette propriété universelle appliquée à $G = F'$ et $f(s) = a'_s$ (respectivement $G = F$ et $f(s) = a_s$) donne l'existence d'un morphisme de groupe $\varphi\colon F \to F'$ (respectivement $\varphi'\colon F' \to F$) tel que $\varphi(a_s) = a'_s$ est $\varphi'(a'_s) = a_s$. Ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre, et cela fournit l'isomorphisme annoncé entre F et F'.

Pour l'existence, on procède comme pour le théorème 1.18, sauf que la preuve est purement algébrique donc plus facile. On considère I l'ensemble des classes d'isomorphismes de paires (G, f) où G est un groupe, f est une fonction de S dans G et $f(S)$ engendre S. On le munit d'une relation d'ordre en décrétant que (G_1, f_1) est au-dessus de (G_2, f_2) s'il existe un morphisme de groupe $\varphi\colon G_1 \to G_2$ tel que $\varphi(f_1(s)) = f_2(s)$ pour tout $s \in S$. Il s'agit de montrer que I admet un élément maximal. On définit le groupe $H = \prod_{(G,f)\in I} G$, et on définit une fonction $\widetilde{f}\colon S \to H$ par $\widetilde{f}(s) = (f(s))_{(G,S)\in S}$. On définit alors $\widetilde{G}$ comme le sous-groupe de H engendré par $\widetilde{f}(S)$, de sorte que $(\widetilde{G}, \widetilde{f})$ est un élémént de I. Par construction, pour tout $(G_0, f_0) \in S$, l'application $\varphi_0\colon (g_{G,S})_{(G,S)\in I} \in G_M \mapsto g_{(G_0,f_0)} \in G_0$ est un morphisme de groupes satisfaisant $\varphi_0 \circ \widetilde{f} = f_0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exercice 4.3. On peut réaliser F_S comme l'ensemble des mots réduits sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$, ou bien aussi le groupe fondamental d'un bouquet de $|S|$ cercles.

Le groupe libre sur S est un cas particulier d'une construction plus générale, celle du produit libre. Pour simplifier, restreignons-nous au cas de produit libre de deux groupes.

Définition-Proposition 4.4 (Produit libre). *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes. Le produit libre* $G_1 * G_2$ *est le groupe, muni de deux morphismes de groupes* $i_1\colon G_1 \to G_1 * G_2$ *et* $i_2\colon G_2 \to G_1 * G_2$ *et vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe* H *et toute paire de morphismes de groupes* $\varphi_k\colon G_k \to H$, *il existe un unique morphisme de groupes* $\varphi\colon G_1 * G_2 \to H$ *qui étend chacun des* φ_k *dans le sens où* $\varphi \circ i_k = \varphi_k$.

Quelques remarques : si le produit libre existe, alors

(1) il est unique[1] dans le sens où si (G, i'_1, i'_2) est un autre groupe vérifiant cette propriété universelle, alors il existe un isomorphisme[2] $\varphi\colon G_1 * G_2 \to G'$ tel que $\varphi \circ i_k = i'_k$ pour $k = 1, 2$.

(2) $i_1(G_1) \cup i_2(G_2)$ engendre $G_1 * G_2$.

(3) i_1 et i_2 sont injectifs.

Justifions ces assertions. Tout d'abord, on peut remarquer que la seconde assertion découle de la première, puisque si $G_1 * G_2$ vérifie la propriété universelle, alors le groupe engendré par $i_1(G_1) \cup i_2(G_2)$ aussi. De plus, la troisième est claire : en

1. et même à unique isomorphisme près
2. unique

appliquant la propriété universelle à $G = G_1$, $\varphi_1 = \mathrm{id}$ et φ_2 le morphisme trivial, on obtient que $\varphi \circ i_1 = \mathrm{id}_{G_1}$ et en particulier i_1 est injectif. Reste à prouver la première assertion. Tout d'abord, par la partie existence de la propriété universelle, il existe un morphisme $\varphi\colon G_1 * G_2 \to G'$ et un morphisme $\psi\colon G' \to G_1 * G_2$ tels que $\varphi \circ i_k = i'_k$ et $\psi \circ i'_k = i_k$. Il faut justifier que φ et ψ sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre. Mais $\varphi \circ \psi\colon G' \to G'$ est un morphisme de groupes satisfaisant $(\varphi \circ \psi) \circ i'_k = i'_k$. L'identité $G' \to G'$ aussi, donc par la partie unicité de la propriété unverselle, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{G'}$. De même $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, ce qu'il fallait démontrer.

La preuve de l'existence est exactement la même que pour le groupe libre.

Exercice 4.5. On peut réaliser $G_1 * G_2$ comme l'ensemble des mots réduits, c'est-à-dire les mots de la forme $a_1 a_2 \dots a_n$ avec $n \geq 0$, a_1 un élément de $G_1 \setminus \{1\}$ ou $G_2 \setminus \{2\}$, et les termes a_i sont alternativement dans $G_1 \setminus \{1\}$ et $G_2 \setminus \{2\}$.

Encore plus généralement, on a une notion de produit libre avec amalgamation.

Définition-Proposition 4.6 (Produit libre avec amalgamation). *Soient G_1, G_2 et K trois groupes et $j_1\colon K \to G_1$ et $j_2\colon K \to G_2$ deux morphismes de groupes. Le produit libre avec amalgamation $G_1 *_{K,j_1,j_2} G_2$ est le groupe, muni de deux morphismes de groupes $i_1\colon G_1 \to G_1 * G_2$ et $i_2\colon G_2 \to G_1 * G_2$ satisfaisant $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ et vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe H et toute paire de morphismes de groupes $\varphi_k\colon G_k \to H$ vérifiant $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$, il existe un unique morphisme de groupes $\varphi\colon G \to H$ qui étend chacun des φ_k dans le sens où $\varphi \circ i_k = \varphi_k$.*

L'existence d'un groupe vérifiant cette propriété universelle découle du même argument de maximalité que pour la Définition-Proposition 4.2. Comme pour le produit libre, le produit libre avec amalgamation est unique à unique isomorphisme près, et $i_1(G_1) \cup i_2(G_2)$ engendre $G_1 *_{K,j_1,j_2} G_2$. Par contre, l'exemple suivant montre que i_1 et i_2 ne sont pas nécessairement injectifs.

Exemple 4.7. Soient m, n deux nombres premiers entre eux, $K = \mathbf{Z}$, $G_1 = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $G_2 = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et j_1, j_2 les réductions modulo n et m. Alors $G_1 *_K G_2$ est le groupe trivial. En effet, le noyau de $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ contient à la fois $n\mathbf{Z}$ et $m\mathbf{Z}$, donc $n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$.

On écrit souvent simplement $G_1 *_K G_2$ lorsque j_1, j_2 sont implicites.

Exercice 4.8. On peut réaliser $G_1 *_K G_2$ comme le quotient de $G_1 * G_2$ par le sous-groupe distingué engendré par $\{i_1(k) i_2^{-1}(k) : k \in K\}$.

2. Le théorème de van Kampen

Reprenons les notations et le cadre du début du chapitre. Les inclusions $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ et $U_1 \cap U_2 \subset U_2$ induisent des morphismes de groupes $j_1\colon \pi_1(U_1 \cap U_2, x) \to \pi_1(U_1, x)$ et $j_2\colon \pi_1(U_1 \cap U_2, x) \to \pi_1(U_2, x)$, qui vérifient (par la Proposition 1.22) $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$. Par propriété universelle, on a donc un unique morphisme de groupes

$$\pi_1(U_1, x) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x), j_1, j_2} \pi_1(U_1, x) \to \pi_1(X, x) \tag{1}$$

étendant j_1 et j_2. Le théorème de van Kampen affirme que ce morphisme est un isomorphisme.

Théorème 4.9. *$\pi_1(X, x)$ est isomorphe, par (1), au produit libre amalgamé*

$$\pi_1(U_1, x) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x), j_1, j_2} \pi_1(U_1, x).$$

Pour la preuve, on va avoir besoin d'une construction qui est une variante de la correspondance de Galois. Soit donc (B, b) un espace topologique pointé connexe et localement simplement connexe, H un groupe et $\varphi\colon \pi_1(B, b) \to H$ un morphisme de groupe. Notons E_φ le quotient de l'espace topologique pointé $(\widetilde{B} \times H, (\widetilde{b}, 1))$ par l'action de $\pi_1(B, b)$ donnée par $f \cdot (x, h) = (f(x), \varphi(f)h)$. L'application p_φ qui à la classe de (x, h) associe $\widetilde{p}(x)$ est alors un revêtement (pas forcément connexe) de B, muni d'un morphisme canonique $\alpha_\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(p_\varphi)$ donné par $\alpha_\varphi(h)(x, h') = (x, h'h^{-1})$. Cette action de H est libre et transitive sur chaque fibre. De même que pour la correspondance de Galois, cette construction est fonctorielle. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.10. *Soit $g\colon (B_1, b_1) \to (B_2, b_2)$ une application continue entre espaces topologiques pointés connexes et localement simplement connexes, et $\varphi\colon \pi_1(B_2, b_2) \to H$ un morphisme de groupes. Notons $\psi = \varphi \circ g_*\colon \pi_1(B_1, b_1) \to H$. Alors il existe un unique application continue H-équivariante $E_{\varphi\circ g_*} \to E_\varphi$ qui envoie point base sur point base et qui rende le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd} E_\psi \arrow[r] \arrow[d, "p_\psi"'] & E_\varphi \arrow[d, "p_\varphi"'] \\ B_1 \arrow[r, "g"] & B_2 \end{tikzcd} .$$

La preuve est identique à Proposition 1.22.

Démonstration du théorème de van Kampen 4.9. Soit H un groupe et $\varphi_k\colon \pi_1(U_k, x) \to H$ une paire de morphismes de groupes vérifiant $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$. Il s'agit de construire un morphisme de groupes $\varphi\colon \pi_1(X, x) \to H$ satisfaisant $\varphi \circ i_k = \varphi_k$ (l'unicité d'un tel morphisme est immédiate par le lemme 4.1). On peut supposer que H est engendré par les images de φ_1 et φ_2. Notons $p_k\colon E_k \to U_k$ le revêtement précédemment introduit pour le morphisme $\varphi_k\colon \pi_1(X_k, x) \to H$. Notons également $p_{12}\colon E_{12} \to U_1 \cap U_2$ le revêtement construit à partir du morphisme $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2\colon \pi_1(U_1 \cap U_2, x) \to H$. Par le lemme précédent, on a deux relèvements H-équivariants $u_1\colon F \to E_1$ et $u_2\colon F \to E_2$. Définissons un nouvel espace topologique en E collant E_1 et E_2 le long de F. Formellement, E est l'espace quotient de l'union disjointe $E_1 \cup E_2$ par la relation d'équivalence $z \sim z'$ si $z = z'$ ou bien il existe $x \in E$ tel que $\{z, z'\} \subset \{u_1(x), u_2(x)\}$. Alors l'application $p\colon E \to x$ définie par $p(z) = p_k(z)$ si $z \in E_k$ est bien définie sur le quotient, et définit un revêtement $E_k \to X$. Il est muni d'une action de H par automorphismes de revêtements (l'action naturelle sur $E_1 \cup E_2$ passe au quotient), qui reste libre et transitive sur chaque fibre. De plus, E est connexe car H est engendré par les images de φ_1 et φ_2. Cela montre donc que p est un revêtement connexe galoisien de X de groupe d'automorphismes H. Par la correspondance de Galois, cela réalise H comme un quotient de $\pi_1(X, x)$. L'application quotient $q\colon \pi_1(X, x) \to H$ est le morphisme $\pi_1(X, x)$ recherché, puisque par construction il vérifie $q \circ i_k = \varphi_k$. $\square$

Bibliographie

[1] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie algébrique. Chapitres 1 à 4*. Springer, Heidelberg, 2016.

[2] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes. 1.*

[3] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.